¿Qué es el cálculo?

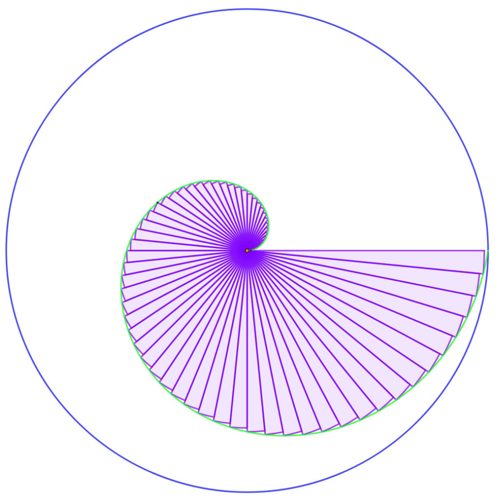
"El método, que Newton usó para fundar el cálculo infinitesimal… es el método de los límites. El método consiste en esto, que en lugar de considerar una transición continua de un valor de una magnitud a otro, de una posición a otra, o en general, de un modo de determinación de un concepto a otro, primero se considera una transición a través de un número de pasos intermedios, y luego permite que crezca el número de estos pasos intermedios, de modo que la distancia entre dos pasos intermedios consecutivos disminuye hasta el infinito" Bernhard Riemann

Arquímedes 300 a.C.

Método de variación continua antesala del método de los límites

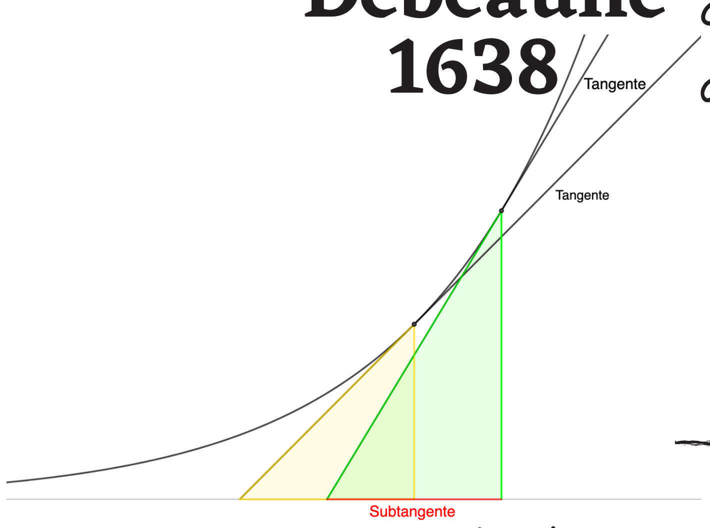
"Siempre los geómetras se han esforzado por descubrir las proporciones de las figuras curvilíneas… Arquímedes encontró cuál sería la razón entre el cono, la esfera y el cilindro, de la misma altura y la misma base… el cilindro es el triple del cono y una vez y media la esfera" Leibniz, 1682.

Haciendo uso de la descripción mecánica de la espiral, Arquímedes, calculó que el área de la espiral (ver figura) es un tercio del área del círculo que se determina en la primera revolución del segmento que, girando en el sentido contrario de las manecillas del reloj y al mismo tiempo un punto moviéndose sobre éste, genera la espiral.



Debeaune 1638

Curva de subtangente constante o la necesidad del cálculo diferencial

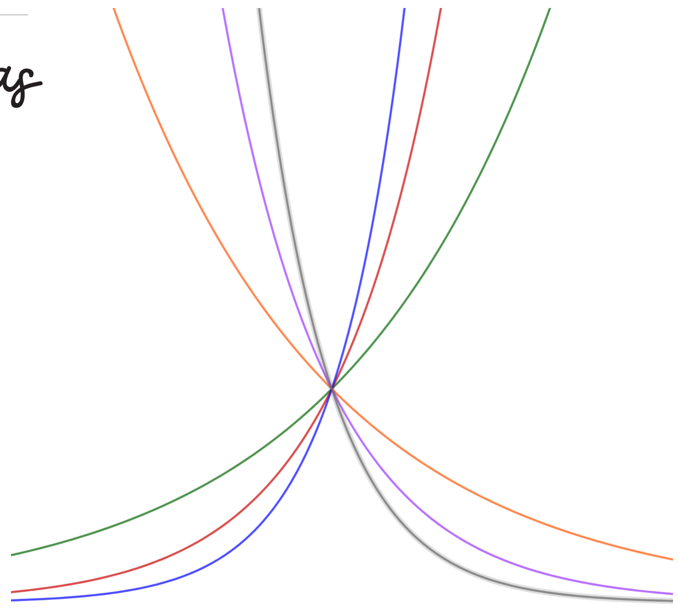


Con la invención de la geometría analítica por Descartes en 1637 muchas curvas en el plano se caracterizaron a través de una *ecuación algebraica*. Debeaune en 1638 le plantea a Descartes encontrar una curva cuya subtangente sea constante (ver figura). A pesar de los esfuerzos de Descartes y Fermat, el problema permaneció sin resolver durante casi 50 años. Leibniz, en 1684, propone una solución: la exponencial. Y se pone de relieve el determinar una curva a través de una *ecuación diferencial*.

Siglo XVIII

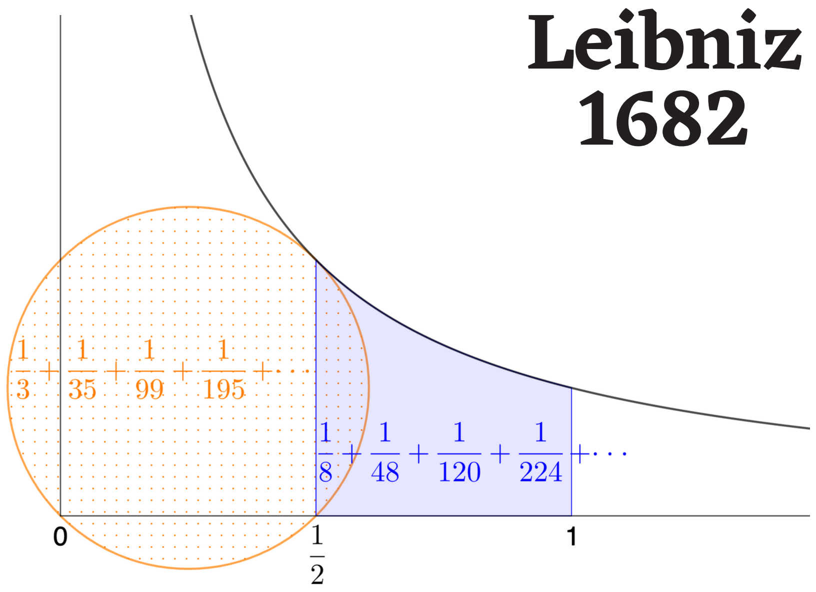
Funciones algebraicas y trascendentes

Los métodos algebraicos, dados por Descartes y Fermat, para calcular los valores máximos y mínimos de una función se reducían sólo a funciones algebraicas. De esta forma, surge la necesidad de calcular máximos y mínimos para funciones más generales. Los métodos del cálculo diferencial (o método de los límites) permitió calcular máximos y mínimos para funciones más generales. Ejemplo de ello, las funciones trascendentes.



Leibniz 1682

Cuadratura aritmética del círculo y de la hipérbola



Para calcular la integral $\int_0^a x^k$ o el área bajo la familia de curvas x^k es necesario conocer $1^k+2^k+\cdots+n^k$ que, a su vez, se calcula a través de un polinomio de grado k+1: p(n), cuyos coeficientes se determinan por un subtriángulo del triángulo de Pascal. Ahora bien, qué se puede decir acerca del cálculo del área bajo la hipérbola: $\int \frac{1}{x^k}$ y del área bajo la circunferencia de un círculo: $\int \sqrt{1-x^2}$ En otras palabras, cómo calcular el área bajo la curva con k<0. ¿Existe un análogo al triángulo de Pascal para el cálculo del área de estas curvas? A diferencia de cuando k es un número natural, para la familia de hipérbolas su área se determina con el triángulo armónico de Leibniz y por un polinomio de grado infinito para el cálculo del área del círculo.

Newton 1665

Teorema generalizado del binomio

El teorema del binomio de Pascal (1654):

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

y su generalización dada por Newton:

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

$a \in \mathbb{Q}, |x| < 1$ están íntimamente relacionados con el conocimiento de los coeficientes de un polinomio, llamado de interpolación de grado finito, para el caso del teorema de Pascal y para el caso del teorema generalizado con el conocimiento de los coeficientes de un polinomio de grado infinito. Polinomio de interpolación que conjugado con el método de los límites dan origen al polinomio de Taylor.